**Лекція №3**

***Примітивна рекурсивність***

***деяких арифметичних функцій***

Нехай

*f*(*x*, *y*) = [*x*/*y*] –

частка від ділення *x* на *y*, а

*g*(*x*, *y*) = *rest*(*x*, *y*) –

остача від ділення *x* на *y*.

Для того, щоб введені функції були всюди визначені, покладемо

[*x*/0] = *x*, *rest*(*x*, 0) = *x*

для всіх *x*. Зрозуміло, що так визначені функції зв’язані тотожністю

*rest*(*x*, *y*) = *x* ∸ (*y* × [*x*/*y*]).

Тому, із того, що функція [*x*/*y*] – ПР функція, буде випливати, що *rest*(*x*, *y*) – ПР функція

**Теорема 3.1.** Функція



ПР функція.

Доведення. Розглянемо послідовність

1*y* ∸ *x*, 2*y* ∸ *x*, …, [*x*/*y*] ∸ *x*, …, *xy* ∸ *x*.

Оскільки частка [*x*/*y*] означає скільки разів число y «поміщається» в числі *x*, то [*x*/*y*] дорівнює числу нулів в цій послідовності. Дійсно, якщо, наприклад, *y* два рази «поміщається» в числі *x*, то

1*y* ∸ *x* = 0, 2*y* ∸ *x* = 0, а 3*y* ∸ *x* ≠ 0.

Тому алгоритм обчислення функції наступний:

function *f*(*x*, *y*)

begin

*s* = 0

if *y* = 0 then *f* = *x*

else {for *i* = 1 to *x*

if *iy* ∸ *x* = 0 then *s* = *s* + 1

*f* = *s*}

end.

Нехай *div*(*x*, *y*) = 1, якщо *rest*(*x*, *y*) = 0, *div*(*x*, *y*) = 0, якщо *rest*(*x*, *y*) ≠ 0.

**Теорема 3.2.** Функція *div*(*x*, *y*) ПР функція.

Доведення. Функція *div*(*x*, *y*) обчислюється наступним алгоритмом:

function *div*(*x*, *y*)

begin

if *rest*(*x*, *y*) = 0 then *div* = 1

else *div* = 0

end.

Нехай

*nd*(*x*) = *div*(*x*, *i*).

При *x* ≠ 0 число *nd*(*x*) співпадає з числом різних дільників числа *x*. Крім того, функція *nd*(*x*) – ПР функція.

**Теорема 3.3.** Функція *nd*(*x*) ПР функція.

Доведення. Функція *nd*(*x*) обчислюється наступним алгоритмом:

function *nd*(*x*)

begin

*s* = 0

for *i* = 0 to *x*

*s* = *s* + *div*(*x*, *i*)

*nd* = *s*

end.

Позначимо через χ*p*(*x*) функцію таку, що χ*p*(*x*) = 0 для *x* простого і χ*p*(*x*) = 1 для *x* непростого.

**Теорема 3.4.** Функція χ*p*(*x*) ПР функція.

Доведення. Функція χ*p*(*x*) обчислюється наступним алгоритмом:

function χ*p*(*x*)

begin

if *nd*(*x*) = 2 then χ*p* = 1

else χ*p* = 0

end.

Нехай

,

тобто дорівнює числу простих чисел не більших *х*.

**Теорема 3.5.** Функція *π*(*x*) ПР функція.

Доведення. Випливає з теореми про сумування.

Дляпростих чисел2, 3, 5, 7, ... введемо функцію *p*(*n*), значенням якої є (*n*+1)-e просте число в натуральному ряді чисел.

**Теорема 3.6.** Функція *p*(*n*) = *pn* є ПРФ.

Дійсно, алгоритм обчислення цієї функції наступний:

function *p*(*n*)

begin

*s* = 0

*k =* 2

for *i* = 2 to 

if χ*p*(*i*) = 0 ∧ *s* ≤ *n*

then {*s* = *s* + 1

*k* = *i*}

*p* = *k*

end.

**Теорема 3.7.** Функція *f*(*x*) = [] є ПРФ.

Дійсно, алгоритм обчислення цієї функції наступний:

function *f*(*х*)

begin

if *x* = 0 then *f* = 0

else

for *i* = 1 to *x*

if (*i*2 ∸ *x*) ≤ 0 ∧ ((*i*+1)2 ∸ *x*) > 0

then *f* = *i* + 1

end.

*Рекурсія з поверненням*

Нехай *α*1(*x*), …, *αs*(*x*) – всюди визначені функції, які для всіх значень *x* задовольняють умовам

*αi*(*x* + 1) ≤ *x* (*i* = 1, … , *s*).

Говорять, що функція *f*(*x*) одержується із функцій *h*(*y*, *z*1, … , *zs*) та допоміжних функцій *α*1, … , *αs*рекурсією з поверненням, якщо для всіх *y*

*f*(0) = *a*,

*f*(*y* + 1) = *h*(*y*, *f*(*α*1(*y* + 1)), … , *f*(*αs*(*y* + 1))) .

В більш спрощеному вигляді ця схема рекурсії має вигляд:

*f*(0) = *a*,

*f*(*x* + 1) = *h*(*x*, *f*(*α*(*x* + 1))) .

**Теорема 3.8.** Якщо функції *h* та α*i* ПРФ, то функція *f*(*x*) є ПРФ.

Доведемо теорему для спрощеної схеми рекурсії. Введемо функцію

.

Значення цієї функції в точках 0, 1, 2, ... обчислюється наступним чином:

*F*(0) = *p*(0)*f*(0), *F*(1) = *p*(0)*f*(0)*p*(1)*f*(1), *F*(2) = *p*(0)*f*(0)*p*(1)*f*(1)*p*(2)*f*(2), … Тому, значення функції *f* точці *x* може бути обчислене як *f*(*x*) = *exp*(*p*(*x*), *F*(*x*)), а для *u* < *x* значення цієї функції обчислюється як *f*(*u*) = *exp*(*p*(*u*), *F*(*x*)).

Покажемо, що функція *F*(*x*) задається рекурсивною схемою. Дійсно,

*F*(0) = 2*a*,

*F*(*x* + 1) = *F*(*x*)*p*(*x* + 1)*f*(*x*+1) = *F*(*x*)*p*(*x* + 1)*h*(*x*,*f*(*α*(*x*+1)))=

*F*(*x*)*p*(*x* + 1)*h*(*x*,exp(*p*(*α*(x+1)), *F*(*x*)).

Таким чином, функція *f*(*x*) є ПРФ.

Інше доведення полягає в побудові алгоритму для обчислення функції *f*. Значення функції *f* в точці *a* може бути обчислене за допомогою наступного алгоритму:

function *f*(*x*)

begin

if *x* = 0 then *f* = *b*

else *f* = *h*(*x*, *f*(*α*(*x*)))

end.

В результаті, наприклад, 2-х рекурсивних викликів, при умові, що *α*(*α*(2)) = 0 та *x* = 2, одержимо наступну послідовність чисел:

*b*0 = *b*,

*b*1 = *h*(*α*(*α*(2)), *b*),

*b*2 = *h*(*α*(2), *b*1).

Число *b*2 буде значенням функції *f* в точці 2.

**Приклад** (Послідовність Фібоначчі). Нехай функція *G*(*x*) задається рівностями

*G*(0) = 0,

*G*(*x* + 1) = *G*(*x*) + *G*(*x* ∸1) + *x*.

Очевидно, що *G*(*x*) одержується рекурсією 2-го рівня з функції

*h*(*y*, *z*1, *z*2) = *y* + *z*1 + *z*2

та допоміжних функцій

*α*1(*y*) = *y* ∸1, *α*2(*y*) = *y* ∸2

(*G*(*x* + 1) = *h*(*x*, *G*(*α*1(*x* + 1), *G*(*α*2(*x* + 1)) ).

Отже, *F*(*x*) – ПР функція.